2016.11.16

制御工学 演習問題解答 (1)

1. ある線形システムのステップ応答 (入力が $x(t) = u(t)$(単位ステップ入力) であるときの出力) が次の式で与えられるシステムについて答えよ．

$$y(t) = e^{-t} - e^{-3t}$$

(1) このシステムの伝達関数 $G(s)$ を求めよ．ただし，伝達関数の分子分母がそれぞれ s の多項式になるように展開して解答せよ (すなわち $G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$).

[解答]

ステップ入力のラプラス変換は

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

出力のラプラス変換は

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} = \frac{2}{(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{2}{s^2+4s+3} \end{aligned}$$

したがって伝達関数は

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{2}{s^2+4s+3}}{\frac{1}{s}} \\ &= \frac{2s}{s^2+4s+3} \end{aligned}$$

伝達関数の定義 $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ と，ステップ関数のラプラス変換 $U(s) = \frac{1}{s}$ をもう一度確認すること．また，計算間違いに注意．$G(s) = \frac{2}{s^3+4s^2+3s}$ という解答が多かった．

(2) このシステムのインパルス応答（単位インパルス関数 $\delta(t)$ が入力された時の出力) を求めよ．

[解答]

インパルス応答はこの $G(s)$ を逆ラプラス変換すればよいので $G(s)$ を部分分数展開すると

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot 1 = \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \end{aligned}$$

公式を使うと

$$
\begin{aligned}
A &= (s+1)Y(s)|_{s=-1} = \left.\frac{2s}{s+3}\right|_{s=-1} = -1 \\
B &= (s+3)Y(s)|_{s=-3} = \left.\frac{2s}{s+1}\right|_{s=-3} = 3
\end{aligned}
$$

あるいは，式を展開してみる．

$$
\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} = \frac{(A+B)s + 3A + B}{(s+1)(s+3)}
$$

であるので、係数を比較すると

$$
\begin{cases}
A + B = 2 \\
3A + B = 0
\end{cases}
$$

を解いて，$A = -1, B = 3$ とすることもできる．したがって，部分分数展開した結果は

$$
Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+3}
$$

インパルス応答はこの $Y(s)$ を逆ラプラス変換すれば良いので

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] \\
&= -e^{-t} + 3e^{-3t}
\end{aligned}
$$

これも，インパルス関数のラプラス変換 $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$ であることと，部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の解法を確認しておくこと．(1) で伝達関数をラプラス変換して解答し，この問題でまた逆ラプラス変換を行って解答をしている例が複数見られたが，(1) のステップ応答と同じ応答が出てきた段階で，おかしいことに気づくべき．

(3) このシステムの周波数伝達関数を求め，$\omega = 1$ のときのゲインを求めよ．

【解答】

求めた伝達関数 $G(s)$ に $s = j\omega$ を代入して $G(j\omega)$ を求める．

$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{2j\omega}{-\omega^2 + 4j\omega + 3} \\
&= \frac{2j\omega}{(-\omega^2 + 3) + 4j\omega} \\
&= \frac{8\omega^2 + 2j\omega(-\omega^2 + 3)}{(-\omega^2 + 3)^2 + 16}
\end{aligned}
$$

$\omega = 1$ を代入すると，

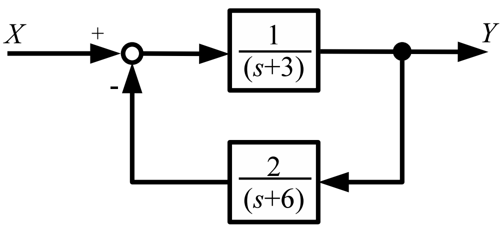
$$|G(j)| = \left|\frac{2j}{2+4j}\right| = \left|\frac{1}{2-j}\right| = \frac{1}{|2-j|}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

周波数伝達関数については，ゲインを求めやすい形にまでは展開すること．$G(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$ の場合，$|G(j\omega)| = \frac{|B(j\omega)|}{|A(j\omega)|}$ なので分母の有理化は必ずしも必須ではないが，実部と虚部を整理するところまではやるべき．

意外に絶対値を求めることができていない人が多い．$z = a + bj$ であるとき，$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である．

出題が曖昧だったが，出題の意図は $|G(j\omega)_{\omega=1}|$ を求めればよく，デシベルで求めなくても良い．

2. 次のフィードバック系について答えよ．



(1) このフィードバック系の開ループ伝達関数 $G_o(s)$ と閉ループ伝達関数 $G_c(s)$ を求めよ．

【解答】

開ループ伝達関数 $G_o(s)$ 及び閉ループ伝達関数 $G_c(s)$ は

$$G_o(s) = G(s)H(s) = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{2}{s+6}$$
$$= \frac{2}{s^2 + 9s + 18}$$
$$G_c(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$
$$= \frac{\frac{1}{s+3}}{1 + \frac{2}{s^2+9s+18}}$$
$$= \frac{s+6}{s^2 + 9s + 20}$$

開ループ伝達関数を $\frac{1}{s+3}$ とする解答が多かった．定義を確認しておくこと．

この問題では明記しなかったが，伝達関数を答えよと言われたら，整理して多項式の比の形で解答することが望ましい．

(2) このフィードバック系のインパルス応答 $y(t)$ を求めよ．

【解答】

システム全体のインパルス応答を求めるのであるから，閉ループ伝達関数を部分分数展開する．

$$
\begin{aligned}
Y(s) = G_c(s) \cdot 1 &= \frac{s+6}{s^2+9s+20} \\
&= \frac{s+6}{(s+4)(s+5)} \\
&= \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+5}
\end{aligned}
$$

公式を使うと

$$
\begin{aligned}
A &= (s+4)Y(s)\big|_{s=-4} = \left.\frac{s+6}{s+5}\right|_{s=-4} = 2 \\
B &= (s+5)Y(s)\big|_{s=-5} = \left.\frac{s+6}{s+4}\right|_{s=-5} = -1
\end{aligned}
$$

通分して解くと

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s+6}{(s+4)(s+5)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+5} \\
&= \frac{(A+B)s+5A+4B}{s^2+9s+20}
\end{aligned}
$$

係数を比較すると

$$
\begin{cases}
A+B=1 \\
5A+4B=6
\end{cases}
$$

より $A=2, B=-1$ が求まる．したがって

$$
Y(s) = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+5}
$$

逆ラプラス変換すると

$$
y(t) = 2e^{-4t} - e^{-5t}
$$

比較的誤答が少なかったが，この問題でもインパルス応答（インパルス入力のラプラス変換）を再確認しておくこと．