2017.1.16

制御工学 演習問題解答 (2)

1. 特性方程式が次のようであるとき，ラウスもしくはフルビッツの安定判別法を使ってこのシステムの安定判別を行え．

(1) $s^3+s^2+s+3=0$

【解答】

ラウス表を作成する．

s^3 行	1	1	0
s^2 行	1	3	0
s^1 行	$\frac{1\times1-1\times3}{1}=-2$	$\frac{1\times0-1\times0}{1}=0$	
s^0 行	$\frac{-2\times3-1\times0}{-2}=3$		

ラウス表の第 1 列の要素の符号が 2 度入れ替わっているので，不安定な根が 2 個あると判定できる．したがってこのシステムは不安定．

フルビッツの安定判別法だと

$$
\begin{aligned}
D_1 &= a_2 = 1 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 1\times1-1\times3=-2
\end{aligned}
$$

より D_2 が負であるので不安定．

(2) $s^3+6s^2+12s+8=0$

【解答】

ラウス表を作ると

s^3 行	1	12	0
s^2 行	6	8	0
s^1 行	$\frac{6\times12-1\times8}{6}=\frac{32}{3}$	$\frac{6\times0-1\times0}{6}=0$	
s^0 行	$\frac{\frac{32}{3}\times8-6\times0}{\frac{32}{3}}=8$		

ラウス表の第 1 列の要素の符号はすべて正であるのでこのシステムは安定．

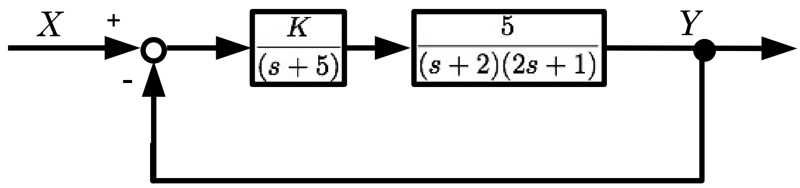
フルビッツの安定判別法だと

$$
\begin{aligned}
D_1 &= a_2 = 6 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 6 \times 12 - 1 \times 8 = 64
\end{aligned}
$$

なので，すべて正であり，安定．

なぜか，(1) のラウス配列は正しく作れているのに，(2) においては，配列の作り方を同じように間違えている例が多数見られた．相談するのは良いが，自分でよく見直すこと．

2. 下図のフィードバック制御系の安定性を判別したい．ただし $K > 0$ とする．



(1) 閉ループ伝達関数を求め，特性方程式を求めよ．ただし，閉ループ伝達関数 $G_o(s)$ とは，

$$G_o(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

【解答】

$R(s), C(s)$ とは何か？という質問がありましたが，設問のミスでした。制御系への入力が $R(s)$, 出力が $C(s)$ です．図と合わせるには

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

とすべきでした。

まず，開ループ伝達関数を求める．

$$G_o(s) = \frac{K}{s+5} \cdot \frac{5}{(s+2)(2s+1)} = \frac{5K}{(s^2+7s+10)(2s+1)} = \frac{5K}{2s^3+15s^2+27}$$

これを用いて，閉ループ伝達関数を求めると，

$$
\begin{aligned}
G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} &= \frac{G_o(s)}{1+\frac{5K}{2s^3+15s^2+27s+10}} \\
&= \frac{5K}{2s^3+15s^2+27s+10+5K}
\end{aligned}
$$

特性方程式は

$$2s^3 + 15s^2 + 27s + 10 + 5K = 0$$

特性方程式は閉ループ伝達関数の分母の多項式=0 とした式．設問に“特性方程式を求めよ”とあるので，閉ループ伝達関数だけの解答では不十分．また，“$= 0$”も入れて欲しい．
伝達関数や特定方程式の解答の形式については，これらを求めたあとに極を計算したり，安定判別をすることが多いので，それにやりやすい形式に整理することが望ましいでしょう．係数に分数などが入っていると，計算間違いを起こしやすいです．決して間違いというわけではありませんが．

(2) このフィードバック制御系が安定である K の条件（値の範囲）を求めよ．

【解答】

特性方程式は $2s^3 + 15s^2 + 27s + 10 + 5K = 0$ なので，ラウスの安定判別法だと，すべての係数の正負が一致することより，$K > -2$ となる．
ラウス表を作ると

s^3 行	2	27	0
s^2 行	15	10+5K	0
s^1 行	$\frac{15\times27-2\times(10+5K)}{15} = \frac{77-2K}{3}$	$\frac{(10+5K)\times0-27\times0}{3} = 0$	
s^0 行	$\frac{\frac{77-2K}{3}\times(10+5K)}{\frac{77-2K}{3}} = 10+5K$		

つまり $\frac{77-2K}{3} > 0$ かつ $10 + 5K > 0$ であるので，$-2 < K < \frac{77}{2} = 38.5$ となる．設問に $K > 0$ とあるので，$0 < K < 38.5$.
フルビッツの安定判別法では

$$D_1 = a_2 = 15$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 10+5K \\ 2 & 27 \end{vmatrix}$$

$$= 15 \times 27 - 2 \times (10 + 5K) = 5 \cdot (81 - 4 - 2K) = 5 \cdot (77 - 2K) > 0$$

より，$K < \frac{77}{2}$ となるので，同様に $0 < K < 38.5$.
D_3 まで求めると，計算間違いが多くなりがちである．係数がすべて正という条件が満たされていれば，特性方程式の次数が n である場合，D_{n-1} まで求めればよい．