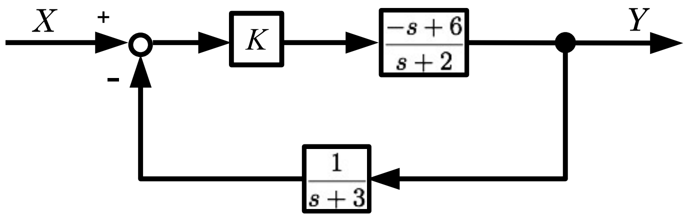
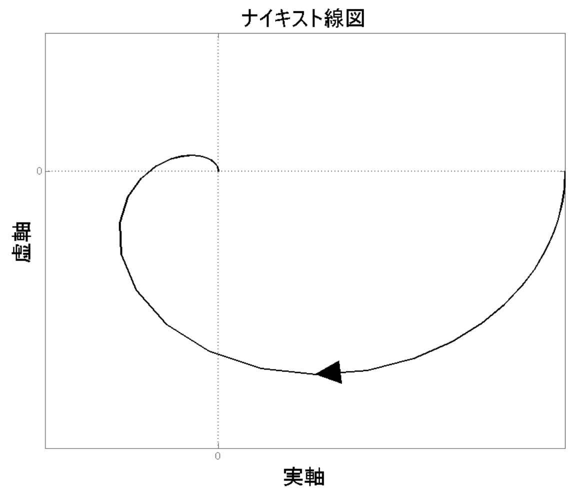
2016.1.18

制御工学 演習問題解答 (3)

次のブロック線図で示されるフィードバック系について答えよ．



1. このシステムの開ループ伝達関数のナイキスト線図の概形は次のようなグラフになる．ただし，このグラフは概形であって，縦軸横軸の大きさ，比率共に必ずしも正しいわけではない．



$K=1$ のとき，開ループ伝達関数 $G_o(s)$ に $s=j\omega$ を代入した周波数伝達関数 $G(j\omega)$ から以下の値を求めよ．

【解答】

開ループ伝達関数 $G_o(s)$ を求めると，

$$G_o(s)=\frac{-s+6}{s+2}\cdot\frac{1}{s+3}=\frac{-s+6}{s^2+5s+6}$$

周波数伝達関数 $G_o(j\omega)$ を求めると，

$$
\begin{aligned}
G_o(j\omega) &= \frac{-j\omega+6}{-\omega^2+5j\omega+6} = \frac{6-j\omega}{(6-\omega^2)+5j\omega} \\
&= \frac{(6-j\omega)\left\{(6-\omega^2)-5j\omega\right\}}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} \\
&= \frac{\left\{6(6-\omega^2)-5\omega^2\right\}-j\omega(6-\omega^2+30)}{36+13\omega^2+\omega^4} \\
&= \frac{(36-11\omega^2)+j\omega(\omega^2-36)}{36+13\omega^2+\omega^4}
\end{aligned}
$$

これを用いて計算する．

(1) $\lim_{\omega\to 0} \mathrm{Re}[G(j\omega)]$

【解答】

$$\lim_{\omega\to 0} \mathrm{Re}[G(j\omega)] = 1$$

(2) $\lim_{\omega\to 0} \mathrm{Im}[G(j\omega)]$

【解答】

$$\lim_{\omega\to 0} \mathrm{Im}[G(j\omega)] = 0$$

(3) $\lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Re}[G(j\omega)]$

【解答】

$$\lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Re}[G(j\omega)] = 0$$

(4) $\lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Im}[G(j\omega)]$

【解答】

$$\lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Im}[G(j\omega)] = 0$$

(5) $\mathrm{Im}[G(j\omega_\pi)] = 0$ となるときの ω_π 及び $\mathrm{Re}[G(j\omega_\pi)]$

【解答】

$\mathrm{Im}[G(j\omega_\pi)] = \dfrac{\omega_\pi(\omega_\pi^2-36)}{36+13\omega_\pi^2+\omega_\pi^4} = 0$ となるのは，$\omega_\pi^2 = 36$ より $\omega_\pi = 6$．

実部を求めると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}[G(j\omega_\pi)] &= \frac{(36-11\omega_\pi^2)}{36+13\omega_\pi^2+\omega_\pi^4} = \frac{(36-11\times 36)}{36+13\times 36+6^4} = \frac{-10}{1+13+36} \\
&= -\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

開ループ伝達関数を使ってナイキスト線図を書くことに注意．また，開ループ伝達関数はループ内のすべての要素の伝達関数の積である．こ

の簡易型のナイキスト線図では，(5) の ω_π は $\omega > 0$ の範囲で考えれば良いので，0 や -6 といった解は考えなくて良い．ただ，これは設問に入れておくべきでした.（ナイキスト線図の概形は $0 < \omega < \infty$ の範囲で描いたものである）周波数伝達関数を解析していくには $G(j\omega)$ を実部と虚部に分ける必要があります．いわゆる複素数の有理化（分母の実数化）です．一般には

$$\frac{c+dj}{a+bj} = \frac{(c+dj)(a-bj)}{(a+bj)(a-bj)} = \frac{(ac+bd)+j(ad-bc)}{a^2+b^2}$$

と式変形することを思い出してください.

2. $K=1$ のときに安定かどうかを，ナイキストの安定判別法を基に答えよ．

【解答】

1. の (5) より，負の実軸と交わる時の複素平面上の点は $(-\frac{1}{5}, 0)$ であるので，$(-1, 0)$ の点を左にみることになるので，安定である．

3. このフィードバック系が安定である K の値の範囲を求めよ．

【解答】

$K \neq 1$ を考えると，開ループ伝達関数そのものが K 倍されることなので，ω_π などは変わらず，実部，虚部それぞれが K 倍されることになる．なので，負の実軸と交わる時の複素平面上の点は $(-\frac{K}{5}, 0)$ になり，これが $(-1, 0)$ よりも右側にあれば安定である．つまり $K < 5$ ならば安定.

問題に $K > 0$ という条件をつけておくべきでした．閉ループ伝達関数を求めて，ラウス，あるいはフルビッツの安定判別をしてももちろん求められます．ただ，2. まで解いてあれば，上記のような手順で容易に求められます.