

制御工学 演習問題解答 (4)

以下の文は、開ループ伝達関数が

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

で与えられるとき、

- ① 単位ランプ入力 ($x(t) = t$, $X(s) = \frac{1}{s^2}$) に対する定常偏差 (定常速度偏差) を 0.1 以内にする.
- ② 位相余裕を 35° 以上にする.

という仕様を、位相遅れ補償によって満たす手順を説明した文章である。ボード線図も参考にして空欄を満たす数値または記号を下の選択肢から選べ。ただし、位相遅れ補償器の伝達関数は

$$G(s) = \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1}, \quad \alpha < 1$$

である。解答は選択肢の記号のみで良い。

- $K = 1$ のときのボード線図は Fig.1 である.
- 単位ランプ入力に対する定常偏差を求めると、 $\epsilon_v = \boxed{(1) (r) \frac{4}{K}}$ となる。仕様①より $\epsilon_v = 0.1$ となるように K を定めると、 $K = \boxed{(2) (i) 40}$ となり、このときのボード線図が Fig.2 となる.

【解説】

定常速度偏差は

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+1)(s+4)}} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+1)(s+4)}{s(s+1)(s+4) + K} = \frac{4}{K} \end{aligned}$$

$\epsilon_v = \frac{4}{K} = 0.1$ より $K = 40$ となる。

- 仕様②を満たすために、ゲイン交差周波数 ω_c を、Fig.2 のボード線図において位相が約 -145° 程度ある $\boxed{(3) (e) 0.8}$ [rad/sec] に設定する.

【解説】

ボード線図から読み取れば良い。Fig.2 では約 0.8 [rad/sec] で位相が -145° と交わっている。

- このときのゲインが Fig.2 のボード線図から約 $\boxed{(4) (h) 20}$ [dB] と読み取れるので、位相遅れ補償器により高周波領域でのゲインを $\boxed{(4) (h) 20}$ [dB] 下げ、ゲインを 0 [dB] にする。位相遅れ補償器

の周波数伝達関数 $G(j\omega)$ から高周波領域でのゲインは $(5) (1) \alpha$ であるので、 $20 \log (5) (1) \alpha = - (4) (h) 20$ と定める。

【解説】

これもボード線図から読み取る。Fig.2 では約 $0.8[\text{rad/sec}]$ でゲインが約 $20[\text{dB}]$ と読み取れる。

高周波領域でのゲインは周波数伝達関数 $G(j\omega)$ を使い、 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)$ を求めれば良い。

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\alpha T j\omega + 1}{T j\omega + 1} = \lim_{\frac{1}{\omega} \rightarrow 0} \frac{\alpha jT + \frac{1}{\omega}}{jT + \frac{1}{\omega}} = \alpha$$

$20 \log \alpha = -20$ より $\alpha = 0.1$ と求められる。

- 位相遅れ補償器の伝達関数 $G(s)$ における位相進み要素の折れ点周波数は、 $(6) (o) \frac{1}{\alpha T}$ である。ゲイン交差周波数に影響を与えないように、ゲイン交差周波数の $\frac{1}{10}$ 程度に設定するとして、

$$(6) (o) \frac{1}{\alpha T} = 0.1 \times (3) (e) 0.8 [\text{rad/sec}] \text{ とする。}$$

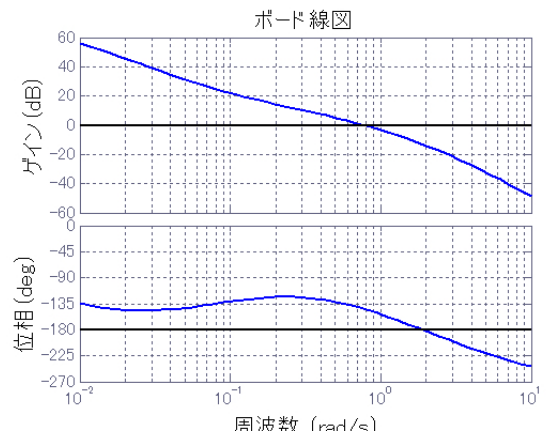
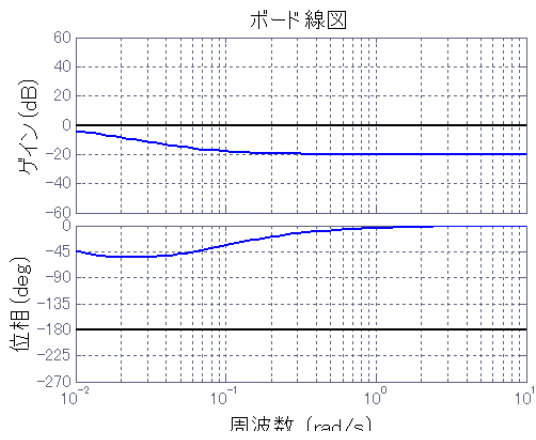
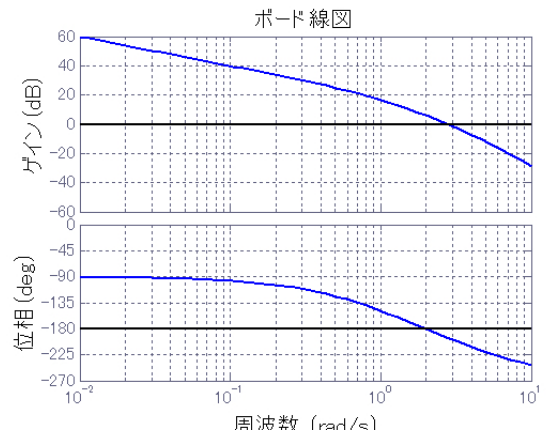
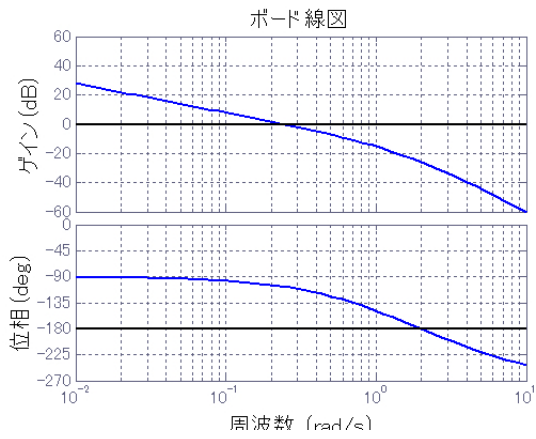
【解説】

位相進み要素は一般的には $1 + sT$ で表される要素であり、折れ点周波数は $\frac{1}{T}$ で表される。ここでは、 $G(s)$ の分子であるので折れ点周波数は $\frac{1}{\alpha T}$ になる。つまり、 $\frac{1}{\alpha T} = 0.08$ なので、 $\alpha T = 12.5, T = 125$ となる。

- 以上より、 $G(s)$ の α, T を求めることができ、位相遅れ補償器は

$$G(s) = \frac{12.5s + 1}{125s + 1}$$

となる。このときの位相補償器のボード線図は Fig.3 であり、位相遅れ補償を加えた開ループ伝達関数のボード線図は Fig.4 となる。



【選択肢】

- | | | | | | |
|----------------|------------------------|--------------------------|------------|-------------------|-------------------|
| (a) -20 | (b) -1 | (c) 0 | (d) 0.08 | (e) 0.8 | (f) 1 |
| (g) 8 | (h) 20 | (i) 40 | (j) 200 | (k) 400 | (l) α |
| (m) αT | (n) $\frac{1}{\alpha}$ | (o) $\frac{1}{\alpha T}$ | (p) $4K$ | (q) $\frac{K}{4}$ | (r) $\frac{4}{K}$ |