2016.2.10

制御工学 演習問題解答 (5)

次の状態変数表現で表されたシステムについて答えよ．ただし，$\boldsymbol{x}(t)$ は 2 次元の状態変数ベクトル，$u(t), y(t)$ は 1 次元の入力および出力である．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

(1) このシステムを伝達関数で表せ．

【解答】

状態方程式をラプラス変換する．

$$s\boldsymbol{X}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}(s) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

整理すると

$$\left(sI - \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{X}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(s) &= \left(sI - \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s) \\ &= \frac{1}{s(s+6)+8} \begin{bmatrix} s+6 & -4 \\ 2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s) \\ &= \frac{1}{s^2+6s+8} \begin{bmatrix} s+6 \\ 2 \end{bmatrix} U(s) \end{aligned}$$

出力方程式をラプラス変換して $X(s)$ を代入すると，

$$\begin{aligned} Y(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}(s) \\ &= \frac{1}{s^2+6s+8} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+6 \\ 2 \end{bmatrix} U(s) \\ &= \frac{2}{s^2+6s+8} U(s) \end{aligned}$$

したがって，伝達関数は

$$G(s) = \frac{2}{s^2+6s+8}$$

と求められる．

別解として，$\boldsymbol{x}= [x_1, x_2]^T$ として，状態方程式を展開する．

$$\dot{x_1} = -4x_2 + u \tag{1}$$
$$\dot{x_2} = 2x_1 - 6x_2 \tag{2}$$
$$y = x_2 \tag{3}$$

(2) 式の x_2 を y に置き換える．

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\dot{y} + 6y\right)$$

両辺を微分して (1) 式に代入する．

$$\frac{1}{2}\left(\ddot{y} + 6\dot{y}\right) = -4y + u$$

整理すると

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = 2u$$

両辺をラプラス変換すると

$$\left(s^2 + 6s + 8\right) Y(s) = 2U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 6s + 8}$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ としたときの遷移行列 e^{At} を求めよ．

【解答】A の固有値及び固有ベクトルを求める．

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 4 \\ -2 & s+6 \end{vmatrix} = s(s+6) + 8 = s^2 + 6s + 8 = (s+2)(s+4)$$

つまり，-2 と -4 が固有値．固有ベクトルを求めると，

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

より，$2x_2 = x_1$ となるので，$[2\ 1]^T$ が固有値 -2 に対応する固有ベクトル．

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

より，$x_2 = x_1$ となるので，$[1\ 1]^T$ が固有値 -4 に対応する固有ベクトル．ここで，

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると，

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

これらを用いて対角化する．

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = T^{-1}AT$$

より，$A^n = T\Lambda^n T^{-1}$ なので，遷移行列は、

$$\begin{aligned} e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & -2e^{-2t} + 2e^{-4t} \\ e^{-2t} - e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) このシステムの入力 $u(t)$ を状態フィードバック入力とする．すなわち，$u(t) = F\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$ としたとき，極が -4 と -6 になるように，状態フィードバック行列 $F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ を求めよ．

【解答】

状態方程式に $u(t) = F\boldsymbol{x}(t)$ を代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + BF\boldsymbol{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} f_1 & -4 + f_2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{aligned}$$

この行列 $(A + BF)$ の固有値が -4 と -6 になるように f_1, f_2 を定める．

$$\begin{aligned} |sI - (A + BF)| &= \begin{vmatrix} s - f_1 & 4 - f_2 \\ -2 & s + 6 \end{vmatrix} \\ &= (s - f_1)(s + 6) + 2(4 - f_2) \\ &= s^2 + (6 - f_1)s - 6f_1 - 2f_2 + 8 \end{aligned}$$

この解が -4 と -6 になれば良いのであるから $(s + 4)(s + 6) = s^2 + 10s + 24$ になれば良い．すなわち

$$\begin{aligned} &6 - f_1 = 10 \\ &-6f_1 - 2f_2 + 8 = 24 \end{aligned}$$

より $f_1 = -4, f_2 = 4$ と求められる．