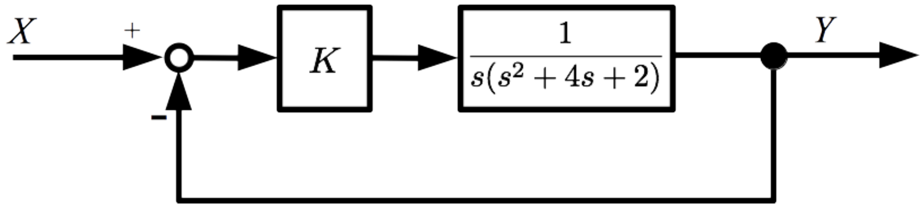
2016.3.1
担当：福村

制御工学 期末試験問題 解答例

1. 次のブロック線図で示されるフィードバック系について答えよ．

(1) 開ループ伝達関数 $G(s)$ を求めよ．ただし，解答は多項式の比 $G(s) = \dfrac{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \cdots + b_{m-1} y + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}$ の形式でなるべく係数が簡単な数値になるように答えよ．この形式になっていない場合には減点する場合がある．

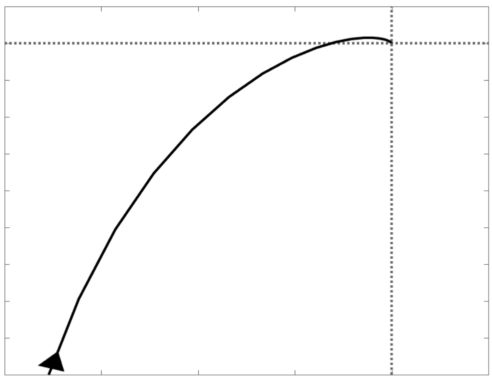


【解答】

開ループ伝達関数は

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+2)} = \frac{K}{s^3+4s^2+2s}$$

(2) $K=1$ のとき，開ループ伝達関数のナイキスト線図を拡大した概形は次のようなグラフになる．ただし，このグラフは概形であって，縦軸横軸の大きさ，比率共に必ずしも正しいわけではない．$K=1$ のとき，開ループ伝達関数 $G(s)$ に $s=j\omega$ を代入した周波数伝達関数 $G(j\omega)$ から以下の値を求めよ．



(a) $\lim_{\omega\to 0} \mathrm{Re}[G(j\omega)]$

(b) $\lim_{\omega\to 0} \mathrm{Im}[G(j\omega)]$

(c) $\lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Re}[G(j\omega)]$

(d) $\lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Im}[G(j\omega)]$

(e) $\mathrm{Im}[G(j\omega_\pi)] = 0$ となるときの ω_π

(f) $\mathrm{Re}[G(j\omega_\pi)]$

【解答】

まず，$K=1$ のときの周波数伝達関数を求めると，

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 2j\omega} = \frac{1}{\omega\left(-4\omega + j(2-\omega^2)\right)} \\ &= \frac{-4\omega - j(2-\omega^2)}{\omega\left(16\omega^2 + (2-\omega^2)^2\right)} \end{aligned}$$

(a) $\displaystyle \lim_{\omega\to 0} \mathrm{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega\to 0} \frac{-4}{16\omega^2 + (2-\omega^2)^2} = -1$

(b) $\displaystyle \lim_{\omega\to 0} \mathrm{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega\to 0} \frac{-2+\omega}{\omega\left(16\omega^2 + (2-\omega^2)^2\right)} = -\infty$

(c) $\displaystyle \lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega\to \infty} \frac{-4}{16\omega^2 + (2-\omega^2)^2} = 0$

(d) $\displaystyle \lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega\to \infty} \frac{-2+\omega}{\omega\left(16\omega^2 + (2-\omega^2)^2\right)} = 0$

(e) $\mathrm{Im}[G(j\omega_\pi)] = 0$ となるときの ω_π

有理化する前の式で分母の虚数部が 0 になればよいから，$2-\omega_\pi^2 = 0$ より $\omega_\pi = \sqrt{2}$

(f) $\mathrm{Re}[G(j\omega_\pi)] = \dfrac{1}{-4\omega_\pi^2} = -\dfrac{1}{8}$

(3) $K = 1$ のときこのフィードバック系が安定かどうかを，ナイキストの安定判別法を基に答えよ．

【解答】

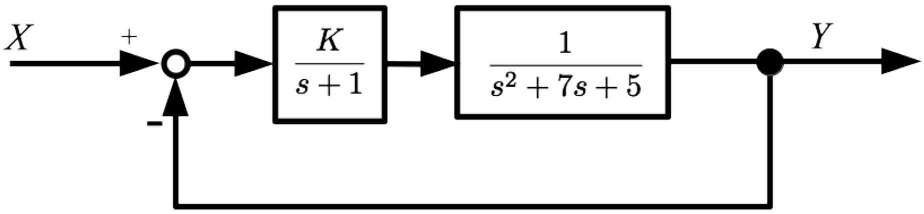
この場合には簡易型のナイキスト線図が使えるので，ナイキスト線図が実数軸と交わるときに，$(-1,0)$ を左側にある，すなわち (2)(f) で求めた点が $(-1,0)$ より原点よりであれば良いので，安定である．

(4) このフィードバック系が安定である K の値の範囲を求めよ．ただし，$K > 0$ とする．

【解答】

$K \neq 1$ を考えると，Re $[G(j\omega_\pi] = -\dfrac{K}{8}$ であるので，これが $\dfrac{K}{8} < 1$ であれば良い．すなわち $K < 8$.

2. 次のブロック線図で与えられるフィードバック系について答えよ．



(1) 閉ループ伝達関数を求めよ．ただし，解答は 1.(1) と同様な多項式の比で答えよ．この形式になっていない場合には減点する場合がある．

【解答】

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\frac{K}{(s+1)(s^2+7s+5)}}{1 + \frac{K}{(s+1)(s^2+7s+5)}} \\
&= \frac{K}{(s+1)(s^2+7s+5)+K} \\
&= \frac{K}{s^3+8s^2+12s+5+K}
\end{aligned}
$$

(2) このシステムが安定であり，かつ単位ステップ入力 ($x(t) = 1,\quad X(s) = \frac{1}{s}$) に対する定常偏差（定常位置偏差）が 0.1 以下となる定数 K は存在するか．存在する場合には，K の条件を求めよ．ただし，$K > 0$ とし，ここでの偏差は $\epsilon_p = \lim_{t\to\infty}\left\{\cancel{y(t) - x(t)}\, x(t) - y(t)\right\}$ とする．

上の赤字のように，問題文が間違えていました．配点には配慮します。

【解答】

ラウス表を作ると

s^3 行	1	12	0
s^2 行	8	5+K	0
s^1 行	$\frac{8\times12-1\times(K+5)}{12} = \frac{91-K}{12}$	$\frac{8\times0-1\times0}{6} = 0$	
s^0 行	$\frac{\frac{91-K}{12}\times(5+K)-8\times0}{\frac{91-K}{12}} = (5+K)$		

ラウス表の第 1 列の要素の符号はすべて正であるためには $K < 91$．フルビッツの安定判別法の場合，

$$
\begin{aligned}
D_1 &= a_2 = 8 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 8\times12 - 1\times(5+K) = 91 - K
\end{aligned}
$$

なので，$K < 91$.

定常位置偏差を求める．

$$\epsilon_p = \lim_{t\to\infty}\{x(t)-y(t)\} = \lim_{s\to 0} s\{X(s)-Y(s)\} = \lim_{s\to 0} sX(s)\{1-G(s)\}$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{s^3+8s^2+12s+5}{s^3+8s^2+12s+5+K}$$
$$= \frac{5}{5+K}$$

これが 0.1 以下であれば良いので，

$$\frac{5}{5+K} < \frac{1}{10}$$
$$50 < 5+K$$

より $K>45$．すなわち $45<K<91$．

3. 以下の文は，制御対象の伝達関数が

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+0.3)(s+0.6)}$$

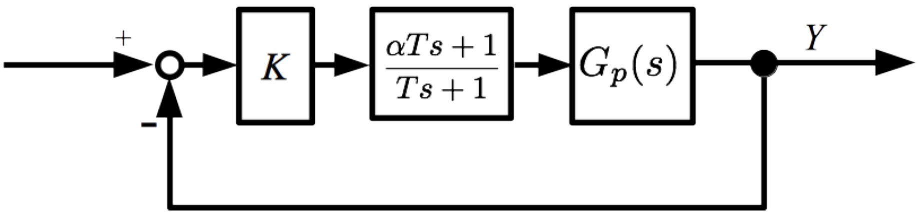
で与えられるとき，

① ゲイン交差周波数を $\omega_c = 3$ にする．

② 位相余裕 PM を約~~35~~30[deg] にする．

という仕様を，下図のようなゲイン補償と位相進み補償によって満たす手順を説明した文章である．位相進み補償とは，$\alpha>0$ であるとき，補償器の伝達関数 $G_c(j\omega)$ の分子である 1 次進み要素 $\alpha Ts+1$ の折れ点周波数 $\frac{1}{\alpha T}$ と，分母である 1 次遅れ要素 $\frac{1}{Ts+1}$ の折れ点周波数 $\frac{1}{T}$ の中間にある，位相進み要素の位相が最大になる角周波数 $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ 付近の位相を進ませる．このときの位相の進み量は $\phi_m = \sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ と表される．そして，ゲイン交差周波数をこの ω_m 付近に設定するように，ゲイン調整をする．これによって，位相余裕を改善することができ，速応性が向上する．

ボード線図 (Fig.1〜4) を参考にして空欄を満たす語句，数値を各 (a)〜(c) の選択肢から選べ．解答は選択肢の記号のみで良い．選択肢がない空欄は，すでに出た同じ番号の空欄の数値が入る．



(step1) 制御対象 $G_p(s)$ のボード線図は Fig.1 である．このときのゲイン交差周波数は (1) (a) 0.300 (b) 0.860 (c) 2.36 [rad/sec]，位相余裕 PM= (2) (a) -16.0 (b) 41.0 (c) 48.2 [deg] と読み取れる．したがって，補償要素を加えない場合，このフィードバック系は (3) (a) 安定 (b) 安定限界 (c) 不安定 である．

(step2) 仕様①よりゲイン交差周波数 $\omega_c = 3$ となるようにゲイン K を定める．Fig.1 より，ゲインを (4) (a) 1.82 (b) 11.4 (c) 18.4 dB 上げる必要がある．このゲインより K を定めたときのボード線図が Fig.2 となり，ゲイン交差周波数が 3[rad/sec] になっていることが確認できる．

(step3) Fig.2 から位相余裕 PM を読み取ると PM = (5) (a) -12.9 (b) 9 (c) 42.1 [deg] となっている．したがって，仕様②を満たすためには，30− (5) [deg] が必要な位相進み量になる．すると，ϕ_m と α の関係式より，$\alpha = 6.76$ と求められる．さらに $T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_c}$ より $T = 0.128$ となる．したがって，位相進み要素は

$$G_c(s) = \frac{0.867s+1}{0.128s+1}$$

となる．この位相進み要素を加えた場合のボード線図が Fig.3 である．

(step4) このとき $\omega_c = 3$ におけるゲインは $10\log_{10}\alpha$[dB] 上がる．このゲインの変化量は Fig.3 のボード線図からも読み取ることができて，約 (6) (a) 8.30 (b) 10.6 (c) 19.2 [dB] である．ゲイン交差周波数を $\omega_c = 3$ にするためには，ゲインをその分だけ下げるようにゲイン調整する．step2 でのゲイン調整を合わせると，最終的なゲインは $K = 3.20$ となる．

(step5) すなわち，このゲイン調整と位相進み要素による制御器は

$$G_c(s) = \frac{3.20(0.867s+1)}{0.128s+1}$$

となり，この補償器を入れたボード線図は Fig.4 になる．

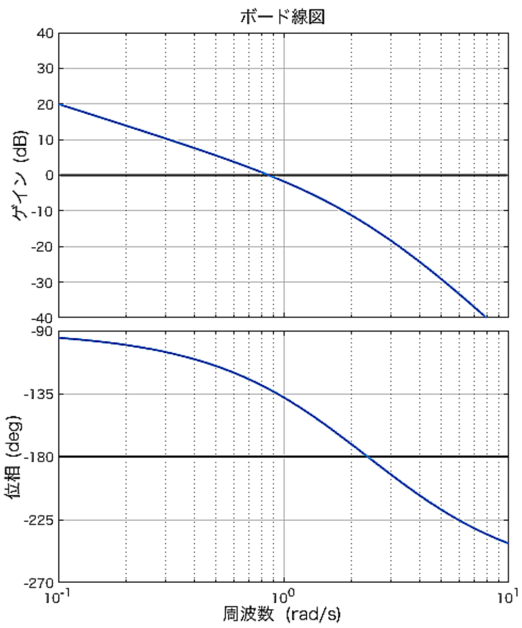


Fig.1

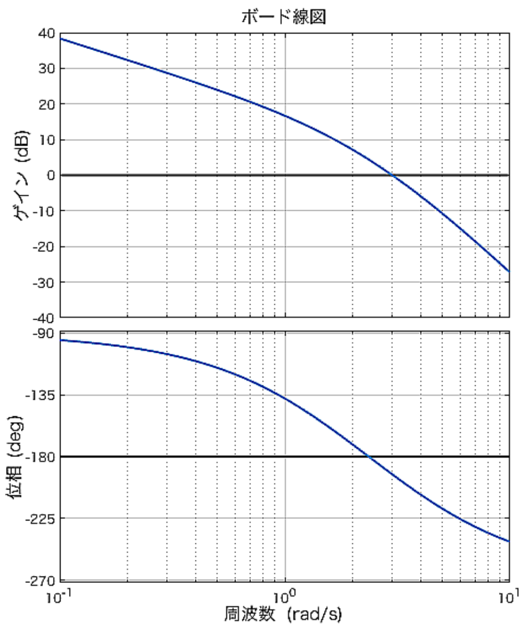


Fig.2

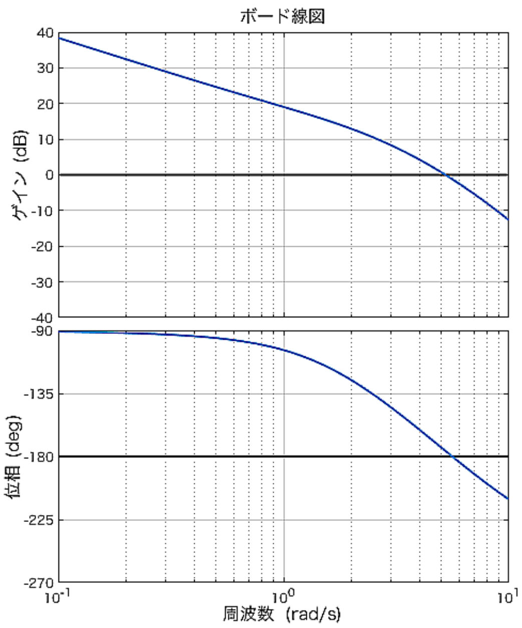


Fig.3

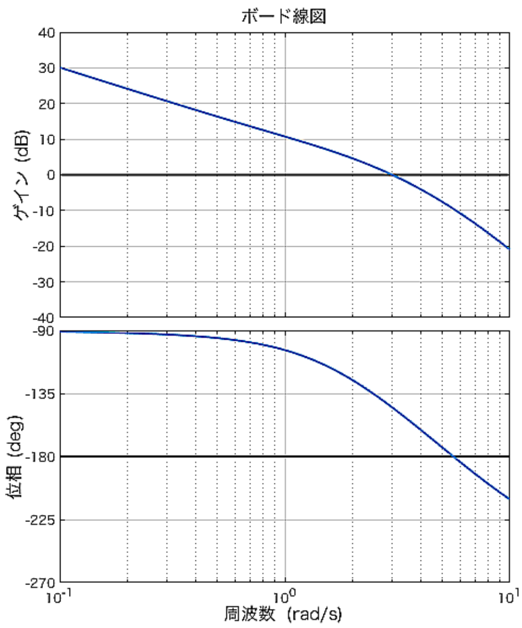


Fig.4

4. 次の状態変数表現で表されたシステムについて答えよ．ただし，$\boldsymbol{x}(t)$ は 2 次元の状態変数ベクトル，$u(t), y(t)$

は 1 次元の入力および出力である．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

(1) このシステムを伝達関数で表せ．解答は 1.(1) と同様な多項式の比で答えよ．この形式になっていない場合には原点する場合がある．【解答】

状態方程式をラプラス変換する．

$$s\boldsymbol{X}(s) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

整理すると

$$\left(sI - \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{X}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}(s) &= \left(sI - \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \\
&= \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+5)(s+1)+3} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \\
&= \frac{1}{s^2+6s+8} \begin{bmatrix} -1 \\ s+5 \end{bmatrix} U(s)
\end{aligned}$$

出力方程式をラプラス変換して $X(s)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}(s) \\
&= \frac{1}{s^2+6s+8} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ s+5 \end{bmatrix} U(s) \\
&= \frac{s+5}{s^2+6s+8} U(s)
\end{aligned}$$

したがって，伝達関数は

$$G(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+8}$$

と求められる．

(2) $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ としたときの遷移行列 e^{At} を求めよ．

【解答】A の固有値及び固有ベクトルを求める．

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{vmatrix} = (s+5)(s+1)+3 = s^2+6s+8 = (s+2)(s+4)$$

つまり，-2 と -4 が固有値．固有ベクトルを求めると，

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_1 - x_1 \\ 3x_1 - x_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

より，$3x_1 = -x_2$ となるので，$[1\ \ -3]^T$ が固有値 -2 に対応する固有ベクトル．

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_1 - x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

より，$x_1 = -x_2$ となるので，$[1\ \ -1]^T$ が固有値 -4 に対応する固有ベクトル．ここで，

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

とすると，

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

これらを用いて対角化する．

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = T^{-1}AT$$

より，$A^n = T\Lambda^n T^{-1}$ なので，遷移行列は、

$$\begin{aligned} e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ -3e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-2t}+3e^{-4t} & -e^{-2t}+e^{-4t} \\ 3e^{-2t}-3e^{-4t} & 3e^{-2t}-e^{-4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) このシステムの入力 $u(t)$ を状態フィードバック入力とする．すなわち，$u(t) = F\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$ としたとき，極が -3 と -5 になるように，状態フィードバック行列 $F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ を求めよ．

【解答】

状態方程式に $u(t) = F\boldsymbol{x}(t)$ を代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + BF\boldsymbol{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ f_1+3 & f_2-1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned}$$

この行列 $(A+BF)$ の固有値が -3 と -5 になるように f_1, f_2 を定める．

$$\begin{aligned} |sI-(A+BF)| &= \begin{vmatrix} s+5 & 1 \\ -f_1-3 & s-(f_2-1) \end{vmatrix} \\ &= (s+5)\left(s-(f_2-1)\right) + f_1 + 3 \\ &= s^2 + (6-f_2)s - 5(f_2-1) + f_1 + 3 \\ &= s^2 + (6-f_2)s + f_1 - 5f_2 + 8 \end{aligned}$$

この解が -3 と -5 になれば良いのであるから $(s+3)(s+5) = s^2+8s+15$ になれば良い．すなわち

$$\begin{aligned} &6 - f_2 = 8 \\ &f_1 - 5f_2 + 8 = 15 \end{aligned}$$

より $f_1 = -3, f_2 = -2$ と求められる．